Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 4 **SoSe 2015** **Abgabe: 21.05.2015**

Computerübungen

Betreuer: Leander Fiedler

Vorweg ein paar Sätze zum Ablauf der Computerübungen. Es dürfen Gruppen mit bis zu 3 Personen gebildet werden, deren Zusammensetzung für die verschiedenen Computerübungen gleich bleiben sollten. Die Lösungen der Computerübungen laden Sie bitte als PDF und als MathematicaNotebook auf der Übungsseite im StudIP in den dafür vorgesehenen Ordner. Es zählt die Version, die dort um 12:00 Uhr am Tag der Abgabe liegt. Die Übungen sind in Form einer ausgearbeiteten Lösung einzureichen in der ich die Schritte, die zur Lösung des Problems führen, einzeln nachvollziehen kann.

Wenn es nötig sein sollte Quellcode anzugeben kommentieren Sie diesen bitte. Das heißt, erklären Sie an den entsprechenden Stellen immer in kurzer und verständlicher Form, was Sie dort gemacht haben. Reinen Quellcode ohne Kommentare oder Ausführungen werde ich nicht bewerten.

Bevorzugtes Programm ist Mathematica. Sie können auch gerne eine andere Sprache wählen (Python o.ä.) nur kann ich dafür keinen Support garantieren. Sie sollten aber in jedem Fall in der Lage sein mir im Zweifelsfall die Lösung zu erklären.

Bei Fragen zu den Computerübungen oder zu Mathematica können Sie sich gerne direkt an mich wenden. Sie finden mich Mittwochs zwischen 14 und 16 Uhr im ITP-Gebäude in der Appelstraße 2 im Raum 007 der AG Quanteninformation.

Wenn nicht anders erwähnt gilt hier in den Aufgaben $\hbar = 1 = c$.

[H10] Rabi-Oszillationen für Qubits (7 Punkte)

Gegeben ist ein Zwei-Niveau-System mit Grundzustandsenergie $E_0 = 0$ und angeregter Energie $E > 0$ welches mit einem zeitperiodischen Term gestört wird. Der resultierende zeitabhängige Hamiltonoperator sei

$$H(t) = H_0 + V(t) \doteq \begin{pmatrix} 0 & \gamma e^{i\omega t} \\ \gamma e^{-i\omega t} & E \end{pmatrix}$$

wobei $H_0 \doteq \mathrm{diag}(0, E)$, $V(t) \doteq \gamma(\sigma_1 \cos(\omega t) - \sigma_2 \sin(\omega t))$ und $\omega, \gamma > 0$. Es ist zweckmäßig die zugehörige Schrödingergleichung umzuschreiben zu (sog. Wechselwirkungsbild)

$$i\partial_t |\psi_I(t)\rangle = V_I(t)|\psi_I(t)\rangle, \ \ |\psi_I(0)\rangle = |1\rangle \tag{1}$$

mit $V_I(t) = e^{iH_0 t} V(t) e^{-iH_0 t}$ und $|\psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t}|\psi_S(t)\rangle$. Dabei bezeichnen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ die Eigenvektoren von H_0 zu den Eigenwerten 0 und E. In der Basis $|0\rangle, |1\rangle$ lässt sich die Lösung wie folgt zerlegen:

$$|\psi_I(t)\rangle = c_0(t)|0\rangle + c_1(t)|1\rangle = (c_0(t), c_1(t))^T$$

was dann zu einer Differentialgleichung für die Koeffizienten $c_0(t)$ und $c_1(t)$ führt. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $W_{0\to 1}$ und $W_{0\to 0}$ in die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ sind dann durch die Betragsquadrate dieser Koeffizienten gegeben.

Bitte wenden

Die exakte Lösung der Populationen bzw. Übergangswahrscheinlichkeiten im $|0\rangle$ und $|1\rangle$ Zustand ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} W_{1\to 0}(t) &= |c_0(t)|^2 = \frac{\gamma^2}{\Omega^2}\sin^2(\Omega t) \\ W_{1\to 1}(t) &= |c_1(t)|^2 = 1 - W_{1\to 0}(t) \end{aligned} \tag{2}$$

mit $\Omega^2 = \gamma^2 + \frac{1}{4}(E-\omega)^2$.

Die folgenden Funktionen (bzw. deren Kurzformen) in Mathematica können im folgenden hilfreich sein: `NDSolve, NestList, Drop, Map, ReplaceAll`. Deren Beschreibung finden Sie in der Mathematica-internen Hilfe (erreichbar mit F1).

Verwenden Sie im in den Aufgaben für die Parameter γ, ω, E folgende Werte: $\gamma = 0.3$, $E = 10$ und $\omega = 9.5$. Das Zeitintervall, für das die Differentialgleichungen gelöst werden sollen, ist $[0, 100]$.

(a) Lösen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung (1) numerisch mit der in Mathematica vorhandenen Methode `NDSolve`. Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten in die Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$, plotten Sie sie für beide Fälle als Funktion der Zeit und vergleichen Sie diese mit der analytischen Lösung (2). Plotten Sie das Betragsquadrat der maximalen Amplitude der Übergangswahrscheinlickeit in den $|0\rangle$-Zustand als Funktion der Frequenz ω. Wählen Sie dafür einen passenden Bereich für ω. Bestimmen Sie aus dem Plot die Resonanzfrequenz ω_r und die Breite der Verteilung und vergleichen Sie das Ergebnis mit der analytischen Lösung (2).

(b) Lösen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung (1) mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens[1]. Verwenden Sie dazu den Ansatz

$$\partial_t|\psi_I(t)\rangle \approx \frac{1}{\Delta t}\left(|\psi_I(t+\Delta t)\rangle - |\psi_I(t)\rangle\right)$$

für ausreichend kleine Δt. Lösen Sie iterativ die entstehende Rekursionsformel für die Zeitschritte $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.01$. Was fällt Ihnen am Ergebnis auf? Vergleichen Sie hier das beste Ergebnis mit der analytischen Lösung (2) und bestimmen Sie die Resonanzfrequenz ω_r und die Breite der dazugehörigen Verteilung.

[H11] Rabi-Oszillationen für Dichtematrizen (3 Punkte)

Für Dichtematrizen ρ ist die Zeitentwicklung bestimmt durch die Liouville-Gleichung:

$$\partial_t\rho(t) = i[\rho(t), H(t)].$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung für den Hamiltonoperator und die Parameter aus Aufgabe H10 numerisch mit `NDSolve` und dem expliziten Euler-Verfahren. Im letzteren Fall wählen Sie $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001$. Wählen Sie als Anfangsbedingung einmal $\rho(0) \doteq \mathrm{diag}(0,1)$ und einmal

$$\rho(0) \doteq \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}.$$

Plotten Sie in beiden Fällen die Übergangswahrscheinlichkeit in den $|0\rangle$-Zustand.

[1] Informationen dazu finden Sie unter: `http://de.wikipedia.org/wiki/Explizites_Euler-Verfahren`